2/ Soit g la fonction numérique définie sur $IR^+\setminus\{\frac{1}{e}\}$ par :

$$\begin{cases} g(x) = \dfrac{-x}{1+\text{Log}x} & \text{pour } x \in IR^+\setminus\{\frac{1}{e}\} \\ g(0) = 0 \end{cases}$$

a- Etudier la continuité et la dérivabilité de g en $x_0 = 0$.

b- Etudier les variations de g et tracer sa courbe représentative (Γ) dans $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

B- Dans cette partie, on prend m=1 et on note f la restriction de f_1 à IR^+ et (C) sa courbe représentative dans un plan rapporté à un repère orthonormé $\left(\omega, \vec{u}, \vec{v}\right)$.

1/a- Tracer (C).

b- Montrer que la restriction φ de f à l'intervalle $\left[0,1\right]$ est une bijection de $[0,1]$ sur un intervalle J que l'on précisera.

c- Quel est l'ensemble de dérivabilité de φ^{-1} ?

d- Tracer, dans un même plan rapporté à un repère orthonormé $\left(\omega', \vec{u'}, \vec{v'}\right)$ les courbes respectives de φ et φ^{-1} qu'on notera respectivement (C_φ)et $(C_{\varphi^{-1}})$.

2/ Pour tout réel $a \in]0,1]$, on note $I(a) = \int_a^1 [-x - \varphi(x)]dx$.

a- Calculer I(a).

b- En déduire le calcul de la mesure S de l'aire du domaine du plan limité par (C_φ) et $(C_{\varphi^{-1}})$ et la droite (D) d'équation $y = -x$.

3/ Soit la suite numérique $(u_n)_{n\in IN}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = e \\ u_n > 0 \text{ et } u_{n-1}f'(u_n) = f(u_{n-1}) \text{ pour } n \geq 1 \end{cases}$$

Où f' désigne la fonction dérivée de f.

a- Calculer u_n en fonction de $n \in IN$.

b- Pour tout entier naturel k , on note M_k et M_{k+1} les points de la courbe (C) d'abscisses respectives u_k et u_{k+1} et s_k la mesure de l'aire du triangle $\omega M_k M_{k+1}$.

Montrer que $s_k = \frac{1}{2}[u_{k+1}f(u_k) - u_k f(u_{k+1})]$ et calculer s_k en fonction de k.

c- On définie la suite $(S_n)_{n\geq n}$ par $S_n = \sum_{k=0}^{k=n-1} s_k$. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$.

UNE CORRECTION POSSIBLE